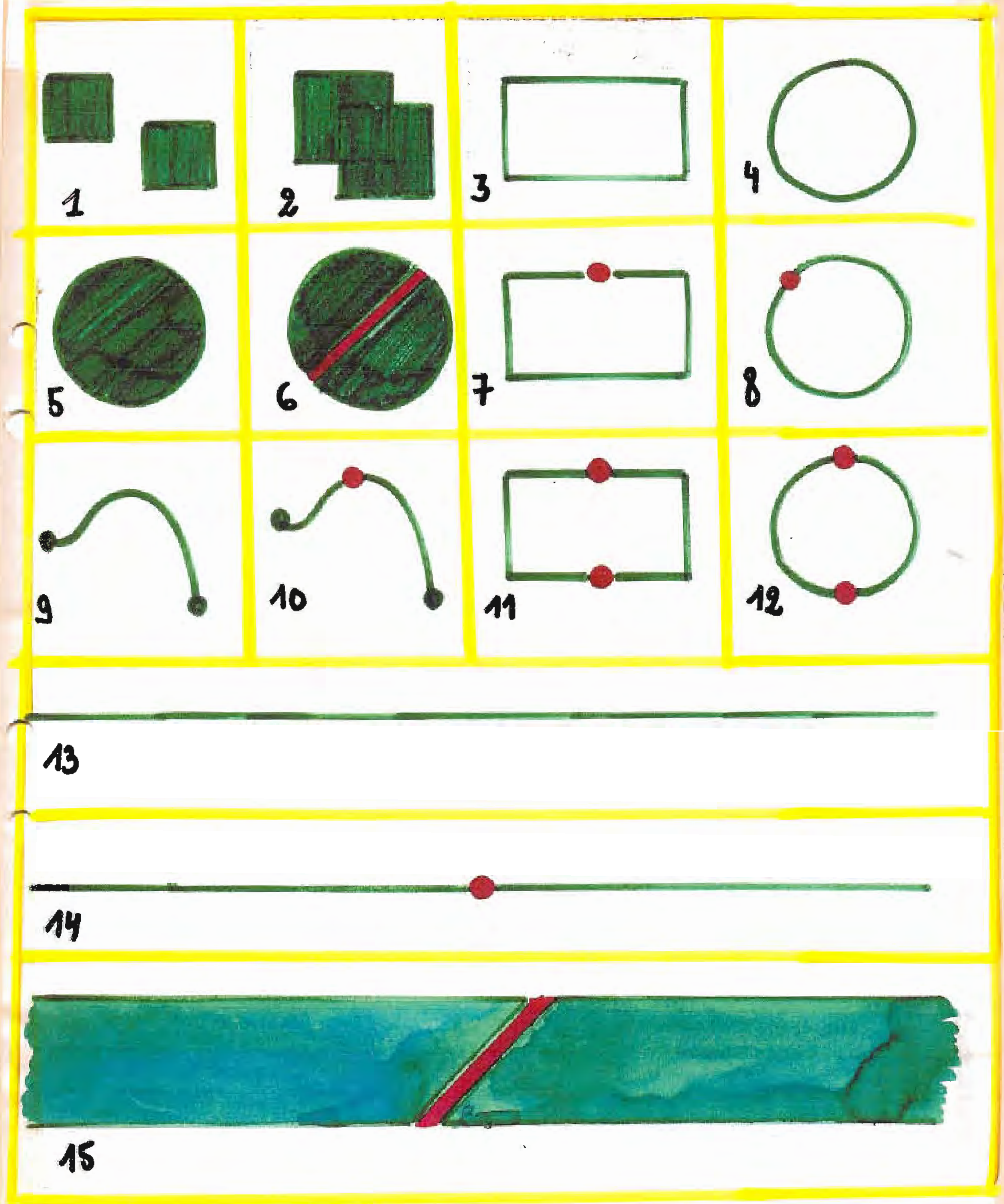
Intermezzo



* Cette planche présente quinze espaces topologiques
Comment les distinguer les uns des autres ?

\- Certains sont ouverts, d'autres fermés, d'autres ni ouverts ni fermés.

* Ouvert, fermé ?
Propriétés éventuelles des ENSEMBLES d'un espace topologique
Ce ne sont pas des propriétés "intrinsèques" d'espaces topologiques

\- Certains de ces espaces sont d'une pièce.
D'autres sont en plusieurs morceaux !

* Nous visions cette distinction
CONNEXE = Espace que vous avez qualifié "d'une pièce"
Quels sont les connexes ?
2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13

* D'accord ... les autres sont NON CONNEXES

\- Chaque non connexe est réunion de deux ouverts disjoints

* Tout espace E est la réunion de ses ouverts triviaux ϕ et E

\- NON CONNEXE = Réunion de deux ouverts disjoints NON VIDES.

* O.K
On vérifie aisément qu'il en est bien ainsi des non connexes 1, 6, 10, 11, 12, 14, 15.

Est-il aussi évident que chacun des connexes 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, [illegible], 13 n'est PAS réunion de deux ouverts disjoints non vides ?

– On voit qu'il en est ainsi ! Quant à le prouver ...

* Cela résultera de la petite théorie des connexes qui constitue les chapitres 5 et 6.

PROPRIETES INTRINSEQUES *de parties d'espace topologique*

Propriété INTRINSEQUE *d'une partie d'espace topologique*

$\Leftrightarrow$ *Propriété du sous-espace qu'elle définit.*

Vide, non vide, finie, infinie, de cardinal r ... sont propriétés intrinsèques.
Fermé, ouvert sont propriétés typiquement non intrinsèques.
x appartient (ou non!) à la partie P est une propriété intrinsèque de P.
x appartient à l'intérieur de la partie P est une propriété non intrinsèque de P
Tout sous-espace topologique P est un ouvert de $P, \mathcal{T}_P$
Dès lors la locution " *sous-espace topologique ouvert* $P, \mathcal{T}_P$ *de* $E, \mathcal{T}$"
signifie tout simplement que P est un ouvert de $E, \mathcal{T}$.
Sous-espace fermé d'un espace topologique.
On appelle parfois *bord* de la partie P d'un espace topologique,
l'intersection de P et de sa frontière.
La notion de bord est non intrinsèque.
Une des manières les plus élégantes de définir une notion intrinsèque relative
à la partie P d'un espace topologique $E, \mathcal{T}$;
consiste à passer explicitement par le sous-espace $P, \mathcal{T}_P$.

Définir la notion intrinsèque de partie *discrète* d'un espace topologique.
La partie vide et les singletons sont les seuls connexes d'un discret
qui mérite la vieille appellation de *totally disconnected.*
En espace séparé, toute partie finie est discrète.
En l'espace SOLIDE $E, \{\emptyset, E\}$ toute partie est connexe.
Les espaces solides mériteraient l'appellation *totally connected.*

NOTION DE CONNEXITE

Issue de la connaissance commune, la notion de *connexité* est un thème majeur de la mathématique moderne, et se présente en des versions fort diverses selon l'environnement du moment.

Le thème est donné par la métadéfinition CONNEXE = *d'un seul tenant*

NON CONNEXE = *en deux pièces qui ne tiennent pas l'une à l'autre.*

A partir de ce motif, il convient de découvrir les variations qui l'adaptent aux diverses situations.

En *Catégorie des ensembles*, il serait naturel de dire :

Deux ensembles tiennent l'un à l'autre SSI leur intersection est non vide.

Il en résulterait : Connexe = Singleton ou vide.

... et il est tout à fait inutile de consommer du terme "connexe" en cette circonstance.

Tentons un premier essai topologique, en affaiblissant la condition ensembliste de l'EX précédent.

En *topologie*, il semble naturel a priori de dire que :

Deux ensembles tiennent l'un à l'autre SSI l'un des deux rencontre l'adhérence de l'autre.

En cette vision, un espace serait *non connexe*

SS'il est la réunion de deux parties non vides ne tenant pas l'une à l'autre au sens précédent.

Finalement un espace serait non connexe, en cette acceptation,

SS'il ne contient pas de fermé non trivial,

SSI sa topologie est une minitopologie.

Cette fois encore, aucune raison de gaspiller le terme "connexe" en la circonstance.

Après les semi-échecs, on consent à poser *en espace topologique* :

Deux ensembles tiennent l'un à l'autre SSI l'intersection de leurs adhérences n'est pas vide.

D'où

En espace topologique :

NON CONNEXE = Réunion de deux ensembles non vides aux adhérences disjointes

= Réunion de deux fermés disjoints non vides

= Réunion de deux ouverts disjoints non vides

= Réunion de fermouverts disjoints non vides

= Contient un fermouvert non trivial